

Лекция 7

Методы решения задач аппроксимации функций

Вопросы лекции

1. Основные понятия в области приближения функций.
2. Методы решения задач интерполирования функций.
3. Методы решения задач аппроксимации путем подбора эмпирических формул.

Вопрос 1.

**Основные понятия
в области приближения функций**

Понятие о приближении функций

1. Постановка задачи. Пусть величина y является функцией аргумента x . Это означает, что любому значению x из области определения поставлено в соответствие значение y . Вместе с тем на практике часто неизвестна явная связь между y и x , т. е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости $y = f(x)$. Иногда даже известная зависимость $y = f(x)$ оказывается настолько громоздкой (например, содержит трудно вычисляемые выражения, сложные интегралы и т. п.), что ее использование в практических расчетах требует слишком много времени.

Наиболее распространенным и практически важным случаем, когда вид связи между параметрами x и y неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы $\{x_i, y_i\}$. Это означает, что дискретному множеству значений аргумента $\{x_i\}$ поставлено в соответствие множество значений функции $\{y_i\}$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Эти значения — либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике нам могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x_i . Однако получить эти значения можно лишь путем очень сложных расчетов или проведением дорогостоящих экспериментов.

Таким образом, с точки зрения экономии времени и средств мы приходим к необходимости использования имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра y при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра x , поскольку точная связь $y = f(x)$ не известна (либо нам нецелесообразно ею пользоваться).

Этой цели и служит задача о приближении (аппроксимации) функций: данную функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией $\varphi(x)$ так, чтобы отклонение (в некотором смысле) $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $\varphi(x)$ при этом называется *аппроксимирующей*.

Аппроксимация рассмотренного выше типа, при которой приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, называется точечной. К ней относятся интерполирование, среднеквадратичное приближение и др. При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке) аппроксимация называется непрерывной (или интегральной). К непрерывной аппроксимации относится, например, равномерное приближение.

Для практики весьма важен случай аппроксимации функции многочленом

$$\varphi(x) = P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m. \quad (2.1)$$

2. Точечная аппроксимация. Одним из основных типов точечной аппроксимации является *интерполирование*. Оно состоит в следующем: для данной функции $y = f(x)$ строим *интерполирующую функцию* $\varphi(x)$ (например, многочлен (2.1)), принимающую в заданных точках x_i , те же значения y_i , что и функция $f(x)$, т. е.

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых, т. е. $x_i \neq x_k$ при $i \neq k$. Точки x_i называются *узлами интерполяции*.

Таким образом, близость интерполирующей функции (рис. 2.1, сплошная линия) к заданной функции состоит в том, что их значения совпадают на заданной системе точек.

Интерполирующая функция $\varphi(x)$ может строиться сразу для всего рассматриваемого интервала изменения x или отдельно для разных частей этого интервала. В первом случае говорят о *глобальной интерполяции*, во втором — о *кусочной (или локальной) интерполяции*.

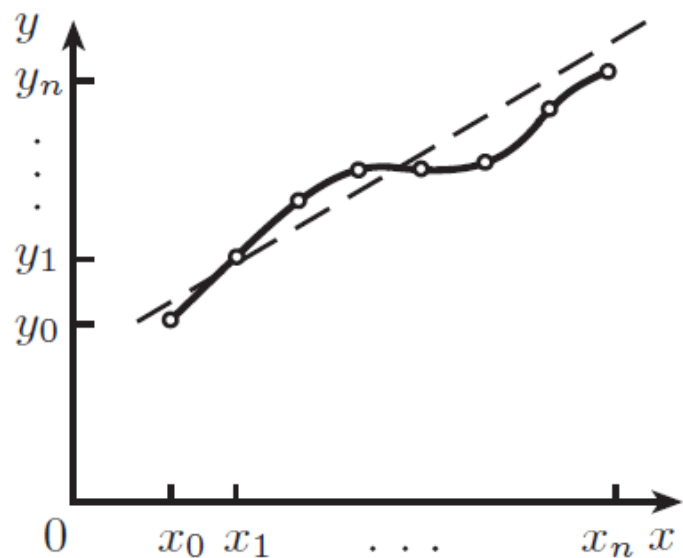


Рис. 2.1. Интерполяция и аппроксимация

Как правило, интерполирование используется для аппроксимации функции в промежуточных точках между крайними узлами интерполяции, т. е. при $x_0 < x < x_n$. Однако иногда оно применяется и для приближенного вычисления функции вне рассматриваемого отрезка ($x < x_0, x > x_n$). Это приближение называют *экстраполяцией*.

Рассмотрим использование в качестве функции $\varphi(x)$ многочлена (2.1), называемого *интерполяционным многочленом*. При глобальной интерполяции, т. е. при построении одного многочлена для всего рассматриваемого интервала изменения x , для нахождения коэффициентов многочлена необходимо использовать все уравнения системы (2.2). Данная система содержит $n + 1$ уравнение, следовательно, с ее помощью можно определить $n + 1$ коэффициент. Поэтому максимальная степень интерполяционного многочлена $m = n$, и многочлен принимает вид

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \quad (2.3)$$

Система уравнений (2.2) при использовании в качестве $\varphi(x)$ многочлена (2.3) является системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n и имеет вид

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n &= y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n &= y_1, \\ \dots & \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n &= y_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Определитель такой системы в линейной алгебре называется *определителем Вандермонда*. Можно показать, что определитель Вандермонда отличен от нуля, если $x_i \neq x_k$ при $i \neq k$, т. е. если среди узлов интерполяции нет совпадающих. Следовательно, в этом случае система (2.4) имеет единственное решение. Решив систему (2.4), можно построить интерполяционный многочлен. Такой метод построения интерполяционного многочлена называется *методом неопределенных коэффициентов*. Заметим вместе с тем, что этот метод требует значительного объема вычислений, особенно при большом числе узлов. Существуют более простые алгоритмы построения интерполяционных многочленов, которые будут рассмотрены в § 3.

Как видим, при интерполировании основным условием является прохождение графика интерполирующей функции через данные значения функции в узлах интерполяции. Однако в ряде случаев выполнение этого условия затруднительно или даже нецелесообразно.

Например, при большом количестве узлов интерполяции в случае глобальной интерполяции получается высокая степень многочлена (2.3). Кроме того, табличные данные могли быть получены путем измерений и содержать ошибки. Построение аппроксимирующей функции с условием обязательного прохождения ее графика через эти экспериментальные точки означало бы тщательное повторение допущенных при измерениях ошибок. Выход из этого положения может быть найден выбором такой функции, график которой проходит близко от данных точек (см. рис. 2.1, штриховая линия). Понятие «близко» уточняется при рассмотрении разных видов приближения.

Одним из таких видов является *среднеквадратичное приближение*. Если при этом используется многочлен (2.1), то $m \leq n$; случай $m = n$ соответствует глобальной интерполяции. На практике стараются подобрать аппроксимирующую функцию как можно более простого вида, например, многочлен степени $m = 1, 2, 3$.

Мерой отклонения функции $\varphi(x)$ от заданной функции $f(x)$ на множестве точек (x_i, y_i) ($i = 0, 1, \dots, n$) при среднеквадратичном приближении является величина S , равная сумме квадратов разностей между значениями аппроксимирующей и заданной функции в данных точках:

$$S = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i) - y_i]^2.$$

3. Непрерывная аппроксимация. Равномерное приближение

Иногда, при построении приближения ставится более жесткое условие: требуется, чтобы во всех точках некоторого отрезка $[a, b]$ отклонение аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ было по абсолютной величине меньше заданной величины $\varepsilon > 0$:

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b.$$

В этом случае говорят, что функция $\varphi(x)$ *равномерно приближает* (аппроксимирует) функцию $f(x)$ с точностью ε на отрезке $[a, b]$.

Понятие равномерного приближения предполагает сравнение заданной и аппроксимирующей функций на непрерывном множестве — отрезке $[a, b]$. Поэтому равномерное приближение относится к непрерывной аппроксимации.

Введем понятие *абсолютного отклонения* Δ функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Оно равно максимальному значению абсолютной величины разности между ними на данном отрезке:

$$\Delta = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \varphi(x)|. \quad (2.5)$$

По аналогии можно ввести понятие *среднеквадратичного отклонения* $\bar{\Delta} = \sqrt{S/n}$ при среднеквадратичном приближении функций. На рис. 2.2 показано принципиальное различие двух рассматриваемых приближений.

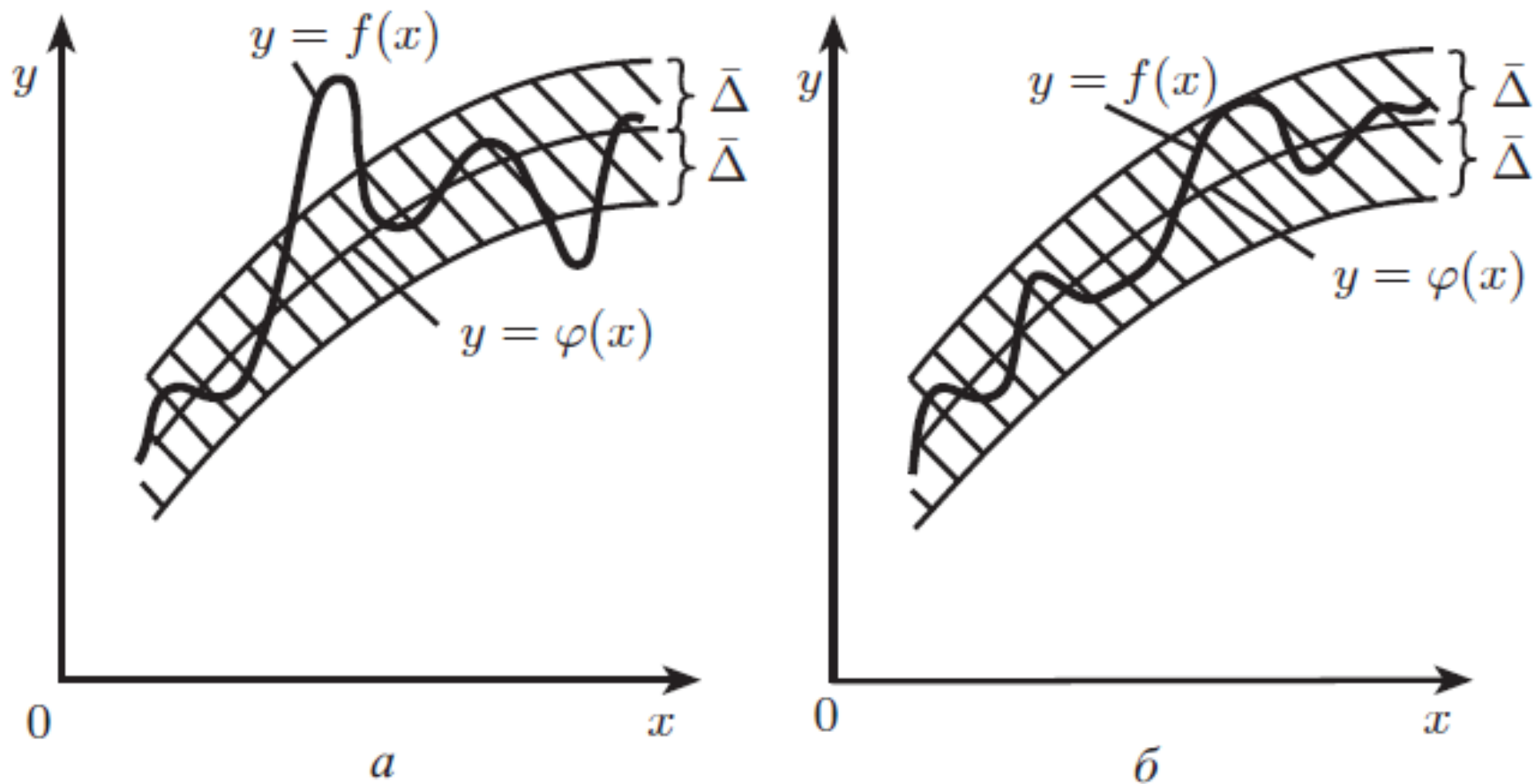


Рис. 2.2. Приближения: среднеквадратичное (а); равномерное (б)

Теорема Вейерштрасса об аппроксимации

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P_m(x)$ степени $m = m(\varepsilon)$, абсолютное отклонение которого от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ меньше ε .

Существует также понятие *наилучшего приближения функции $f(x)$ многочленом $P_m(x)$ фиксированной степени m* . В этом случае коэффициенты многочлена (2.1) следует выбрать так, чтобы на заданном отрезке $[a, b]$ величина абсолютного отклонения (2.5) была минимальной. Такой многочлен $P_m(x)$ называется *многочленом наилучшего равномерного приближения*. Существование и единственность многочлена наилучшего равномерного приближения вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Для любой функции $f(x)$, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве G , и любого целого $m \geq 0$ существует многочлен $P_m(x)$ степени не выше m , абсолютное отклонение которого от функции $f(x)$ среди всех многочленов степени не выше m минимально, т. е. $\Delta = \Delta_{\min}$, причем такой многочлен единственный.

4. Вычисление многочленов. При аппроксимации функций, а также в некоторых других задачах приходится вычислять значения многочленов вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (2.6)$$

Если проводить вычисления «в лоб», т. е. находить значения каждого члена и суммировать их, то при больших n потребуется выполнить большое число операций ($n^2 + n/2$ умножений и n сложений). Кроме того, это может привести к потере точности за счет погрешностей округления. В некоторых частных случаях удастся выразить каждый последующий член через предыдущий и таким образом значительно сократить объем вычислений.

Анализ многочлена (2.6) в общем случае приводит к тому, что для исключения возведения x в степень в каждом члене многочлен целесообразно переписать в виде

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n) \dots)).$$

Прием, с помощью которого многочлен представляется в таком виде, называется *схемой Горнера*. Соответствующий ему алгоритм вычисления значения многочлена изображен на рис. 2.3. Этот метод требует n умножений и n сложений. Использование схемы Горнера для вычисления значений многочленов не только экономит машинное время, но и повышает точность вычислений за счет уменьшения погрешностей округления.

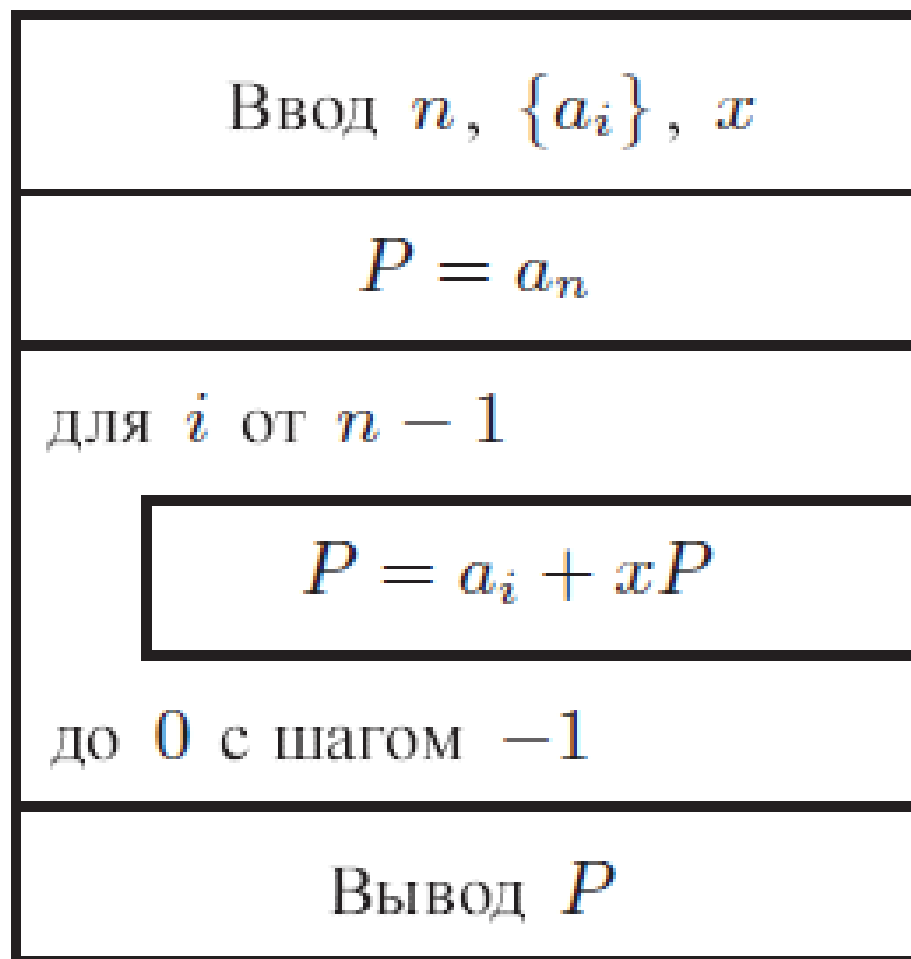


Рис. 2.3. Схема Горнера

Использование рядов

Для вычисления значений функций на компьютере используются разложения этих функций в степенные ряды. Например, функция $\sin x$ вычисляется с помощью ряда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (2.7)$$

При известном значении аргумента x значение функции может быть получено с точностью до погрешностей округления. Количество используемых членов ряда (2.7) зависит от значения аргумента.

Для предотвращения влияния погрешностей округления необходимо выполнение неравенства $|x| < 1$.

С помощью степенных рядов вычисляются значения и других элементарных функций. В частности, для вычисления значений функции $\cos x$ можно использовать ряд (2.7) с учетом соотношения $\cos x = \sin(\pi/2 + x)$, а можно и непосредственно воспользоваться разложением в ряд функции $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (2.8)$$

Гиперболические синус и косинус можно вычислить с помощью разложения в ряд экспоненты e^x , поскольку

$$\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2, \quad \operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2.$$

Можно также воспользоваться разложением в ряд самих функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$. Так, при вычислении $\operatorname{sh} x$ для $x \approx 0$ в целях предотвращения потери точности из-за вычитания близких величин полезно использовать ряд

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Многочлен Чебышева

Одним из способов совершенствования алгоритма вычислений, позволяющих более равномерно распределить погрешность по всему интервалу, является использование многочленов Чебышева.

Многочлен Чебышева $T_n(x)$ степени n определяется следующей формулой:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{1 - x^2})^n + (x - \sqrt{1 - x^2})^n \right],$$
$$-1 \leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.9)$$

Легко показать, что (2.9) на самом деле является многочленом. Действительно, при возведении двучленов в степень n выражения

$\sqrt{1 - x^2}$ будут возведены в четные и нечетные степени. Эти выражения в четных степенях станут рациональными, а в каждой из нечетных степеней они будут присутствовать дважды с коэффициентами противоположных знаков, вследствие чего взаимно уничтожатся.

Приведем многочлены Чебышева, полученные по формуле (2.9) при $n = 0, 1, 2, 3$ (рис. 2.5):

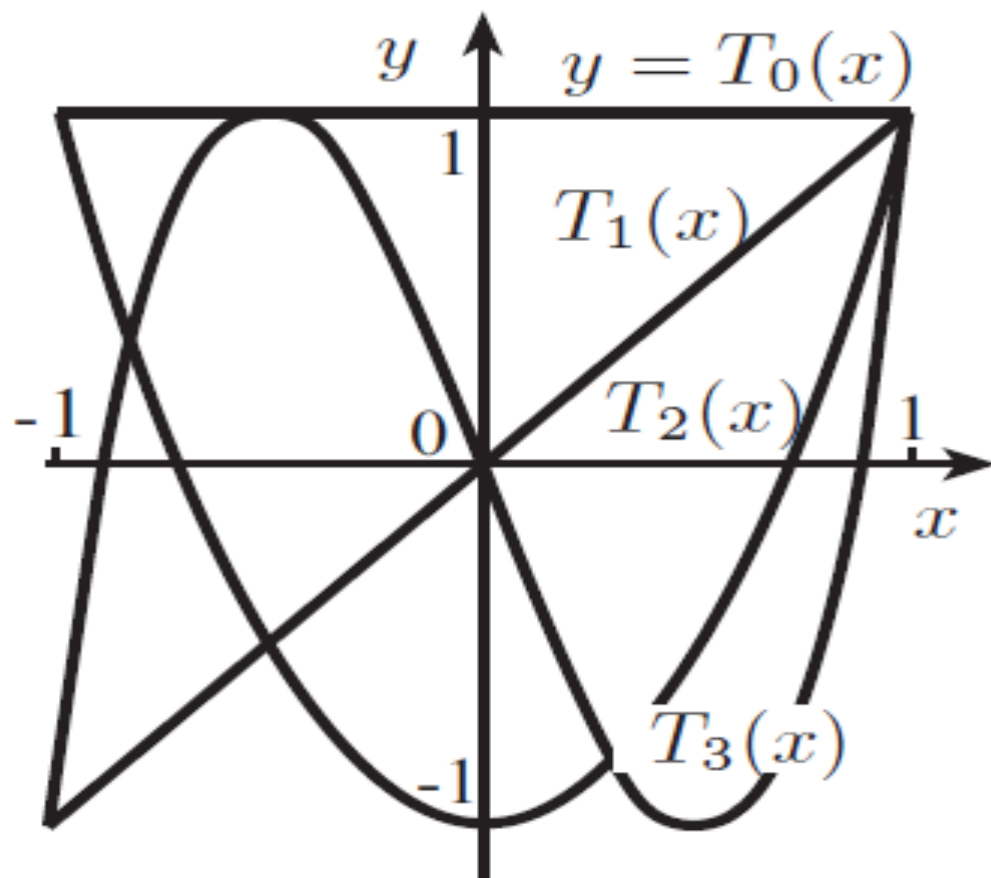


Рис. 2.5. Многочлены Чебышева

Нули (корни) многочленов Чебышева на отрезке $[-1, 1]$ определяются формулой

$$z_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Они расположены неравномерно на отрезке и сгущаются к его концам.

Вычисляя экстремумы многочлена Чебышева по обычным правилам (с помощью производных), можно найти его максимумы и минимумы:

$$x_k = \cos(k\pi/n), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

В этих точках многочлен принимает поочередно значения $T_n(x_k) = \pm 1$, т. е. все максимумы равны 1, а минимумы равны -1 . На границах отрезка значения многочленов Чебышева равны ± 1 .

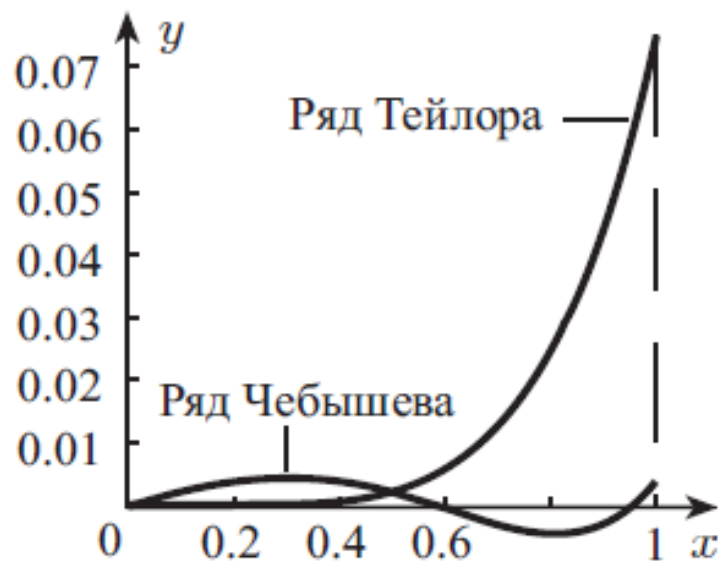


Рис. 2.6. Погрешность аппроксимации функции $y = \sin(\pi x/2)$ с помощью рядов Тейлора и Чебышева с учетом членов до x^3 включительно

В частности, при использовании многочленов Чебышева до седьмой степени включительно (т. е. при использовании четырех ненулевых членов (2.14)) погрешность находится в интервале $(-5.9 \div 5.9) \cdot 10^{-6}$. Для сравнения напомним, что при использовании четырех членов ряда Тейлора погрешность для этой задачи на концах отрезка составляет $\pm 1.6 \cdot 10^{-4}$.

3. Рациональные приближения. Рассмотрим другой вид аппроксимации функций — с помощью дробно-рационального выражения. Функцию представим в виде отношения двух многочленов некоторой степени. Пусть, например, это будут многочлены третьей степени, т. е. представим функцию $f(x)$ в виде дробно-рационального выражения

$$f(x) = \frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3}{1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3}. \quad (2.24)$$

Значение свободного члена в знаменателе $c_0 = 1$ не нарушает общности этого выражения, поскольку при $c_0 \neq 1$ числитель и знаменатель можно разделить на c_0 . Если же $c_0 = 0$, то $f(x)$ будет иметь особенность при $x = 0$. Такую аппроксимацию рассматривать не будем.

Перепишем выражение (2.24) в виде

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 = (1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3)f(x).$$

Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (2.25)$$

и учитывая члены до шестой степени включительно, получаем

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 = (1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) \times \\ \times (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6).$$

Преобразуем правую часть, этого равенства, записав ее разложение по степеням x :

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 = a_0 + x(a_1 + a_0c_1) + x^2(a_2 + a_1c_1 + a_0c_2) + \\ + x^3(a_3 + a_2c_1 + a_1c_2 + a_0c_3) + x^4(a_4 + a_3c_1 + a_2c_2 + a_1c_3) + \\ + x^5(a_5 + a_4c_1 + a_3c_2 + a_2c_3) + x^6(a_6 + a_5c_1 + a_4c_2 + a_3c_3).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}b_0 &= a_0, \\b_1 &= a_1 + a_0c_1, \\b_2 &= a_2 + a_1c_1 + a_0c_2, \\b_3 &= a_3 + a_2c_1 + a_1c_2 + a_0c_3, \\0 &= a_4 + a_3c_1 + a_2c_2 + a_1c_3, \\0 &= a_5 + a_4c_1 + a_3c_2 + a_2c_3, \\0 &= a_6 + a_5c_1 + a_4c_2 + a_3c_3.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Решив эту систему, найдем коэффициенты $b_0, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ необходимые для аппроксимации (2.24).

Вопрос 2

**Методы решения задач
интерполирования функций**

1. Линейная и квадратичная интерполяции. Простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции является *линейная* (или *кусочно линейная*) *интерполяция*. Она состоит в том, что заданные точки (x_i, y_i) ($i = 0, 1, \dots, n$) соединяются прямолинейными отрезками, и функция $f(x)$ приближается ломаной с вершинами в данных точках.

Уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае разные. Поскольку имеется n интервалов (x_{i-1}, x_i) , то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного многочлена используется уравнение прямой, проходящей через две точки. В частности, для i -го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i) , в виде

$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Отсюда

$$y = a_i x + b_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad (2.28)$$
$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}.$$

Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента x , а затем подставить его в формулу (2.28) и найти приближенное значение функции в этой точке. Данный алгоритм представлен на рис. 2.7.

Рассмотрим теперь случай *квадратичной интерполяции*. В качестве интерполяционной функции на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ принимается квадратный трехчлен. Такую интерполяцию называют также *параболической*.

Уравнение квадратного трехчлена

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}, \quad (2.29)$$

содержит три неизвестных коэффициента a_i, b_i, c_i , для определения которых необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы (2.29) через три точки $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$. Эти условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i &= y_{i-1}, \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i &= y_i, \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i &= y_{i+1}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Если отвлечься от того, что отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ является подмножеством отрезка $[x_0, x_n]$, и рассмотреть его отдельно, то квадратичную интерполяцию (2.29) можно трактовать как глобальную с $n = 2$, а систему (2.30) — как частный случай системы (2.4).

Ввод $\{x_i\}, \{y_i\}, x$	
$i = 0$	
	$i = i + 1$
до $x < x_i$	
$a = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},$ $b = y_{i-1} - a x_{i-1}, \quad y = a x + b$	
Вывод y	

Рис. 2.7. Алгоритм линейной интерполяции

2. Многочлен Лагранжа. Перейдем к случаю глобальной интерполяции, т. е. к построению интерполяционного многочлена, единого для всего отрезка $[x_0, x_n]$. Как уже отмечалось в § 1, для построения такого многочлена достаточно решить систему (2.4), однако этот путь неэффективен.

Будем искать интерполяционный многочлен в виде линейной комбинации многочленов степени n :

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x). \quad (2.31)$$

При этом потребуем, чтобы каждый многочлен $l_i(x)$ обращался в нуль во всех узлах интерполяции, за исключением одного (i -го), где он должен равняться единице. Легко проверить, что этим условиям при $i = 0$ отвечает многочлен вида

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}. \quad (2.32)$$

Действительно, $l_0(x_0) = 1$. При $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ числитель выражения (2.32) обращается в нуль. По аналогии с (2.32) получим

$$\begin{aligned}
 l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}, \\
 l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 l_i(x) &= \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 l_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Подставляя в (2.31) выражения (2.32), (2.33), находим

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \tag{2.34}$$

Эта формула определяет *интерполяционный многочлен Лагранжа*.

Существует несколько обобщений интерполяционного многочлена Лагранжа. Например, довольно широко используются *интерполяционные многочлены Эрмита*. Здесь наряду со значениями функции y_i в узлах x_i задаются значения ее производной y'_i . Задача состоит в том, чтобы найти многочлен $\varphi(x)$ степени $2n + 1$, значения которого и значения его производной в узлах x_i удовлетворяют соответственно соотношениям

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad \varphi'(x_i) = y'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В этом случае также существует единственное решение, если все x_i различны.

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функции. Например,

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0, \\ \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \dots = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.\end{aligned}$$

Аналогично для любого k можно написать

$$\Delta^k y_0 = y_k - ky_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \dots + (-1)^k y_0. \quad (2.36)$$

Эту формулу можно записать и для значения разности в узле x_i :

$$\Delta^k y_i = y_{k+i} - ky_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+i-2} + \dots + (-1)^k y_i.$$

Используя конечные разности, можно определить y_k :

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^k y_0.$$

Перейдем к построению интерполяционного многочлена Ньютона. Этот многочлен будем искать в следующем виде:

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (2.37)$$

График многочлена должен проходить через заданные узлы, т. е. $N(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Эти условия используем для нахождения коэффициентов многочлена:

$$\begin{aligned} N(x_0) &= a_0 = y_0, \\ N(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1h = y_1, \\ N(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = \\ &= a_0 + 2a_1h + 2a_2h^2 = y_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Найдем отсюда коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 :

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0, \quad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}, \\ a_2 &= \frac{y_2 - a_0 - 2a_1h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}. \end{aligned}$$

Аналогично можно найти и другие коэффициенты. Общая формула имеет вид

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.37), получаем следующий вид *интерполяционного многочлена Ньютона*:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (2.38)$$

Конечные разности $\Delta^k y_0$ могут быть вычислены по формуле (2.36).

Формулу (2.38) часто записывают в другом виде. Для этого вводится переменная $t = (x - x_0)/h$; тогда

$$x = x_0 + th, \quad \frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1, \\ \frac{x - x_2}{h} = t - 2, \quad \dots, \quad \frac{x - x_{n-1}}{h} = t - n + 1.$$

С учетом этих соотношений формулу (2.38) можно переписать в виде

$$N(x) = N(x_0 + th) = y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots \\ \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (2.39)$$

Полученное выражение называется *первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования вперед*. -

Полученное выражение называется *первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования вперед*. Оно может аппроксимировать данную функцию $y = f(x)$ на всем отрезке изменения аргумента $[x_0, x_n]$. Однако с точки зрения повышения точности расчетов (путем уменьшения погрешностей округления) более целесообразно использовать (2.39) для вычисления значения функции в точках левой половины рассматриваемого отрезка.

Для правой половины отрезка $[x_0, x_n]$ разности лучше вычислять справа налево. В этом случае $t = (x - x_n)/h$, т. е. $t < 0$, и интерполяционный многочлен Ньютона можно получить в виде

$$N(x) = N(x_n + th) = y_n + t \Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots \\ \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (2.40)$$

Полученная формула называется *вторым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования назад*.

4. Точность интерполяции. График интерполяционного многочлена $y = \varphi(x)$ проходит через заданные точки, т. е. значения многочлена и данной функции $y = f(x)$ совпадают в узлах $x = x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Если функция $f(x)$ сама является многочленом степени n , то имеет место тождество $f(x) \equiv \varphi(x)$. В общем случае в точках, отличных от узлов интерполяции, $R(x) = f(x) - \varphi(x) \neq 0$. Эта разность есть погрешность интерполяции и называется *остаточным членом интерполяционной формулы*. Оценим его значение.

Предположим, что заданные числа y_i являются значениями некоторой функции $y = f(x)$ в точках $x = x_i$. Пусть эта функция непрерывна и имеет непрерывные производные до $(n + 1)$ – го порядка включительно. Можно показать, что в этом случае остаточный член интерполяционного многочлена Лагранжа имеет вид

$$R_L(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_*). \quad (2.41)$$

Здесь $f^{(n+1)}(x_*)$ — производная $(n + 1)$ – го порядка функции $f(x)$ в некоторой точке $x = x_*$, $x_* \in [x_0, x_n]$. Если максимальное значение этой производной равно

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1},$$

то можно записать формулу для оценки остаточного члена:

$$|R_L(x)| \leq \frac{\omega_n(x)}{(n + 1)!} M_{n+1},$$

где функция $\omega_n(x)$ определена как

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (2.42)$$

Проанализировав поведение функции $\omega_n(x)$, можно сделать вывод о том, что погрешность интерполяции $R_L(x)$ в среднем будет тем выше, чем ближе точка x лежит к концам отрезка $[x_0, x_n]$. Если же использовать интерполяционный многочлен для аппроксимации функции вне отрезка $[x_0, x_n]$ (экстраполяция), то погрешность возрастет существенно.

Вид остаточного члена интерполяционного многочлена Ньютона в случае равноотстоящих узлов можно легко получить из (2.41):

$$R_N(x) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_*) h^{n+1}, \quad t = \frac{x-x_0}{h}.$$

Если предположить, что разность $\Delta^{n+1}y_n$ постоянна, то можно записать следующую формулу остаточного члена первого интерполяционного многочлена Ньютона:

$$R_N(x) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1}y_0.$$

5. Сплайны. Сейчас широкое распространение для интерполяции получило использование кубических *сплайн-функций* — специальным образом построенных многочленов третьей степени. Они представляют собой некоторую математическую модель гибкого тонкого стержня из упругого материала. Если закрепить его в двух соседних узлах интерполяции с заданными углами наклонов α и β (рис. 2.8), то между точками закрепления этот стержень (механический сплайн) примет некоторую форму, минимизирующую его потенциальную энергию.

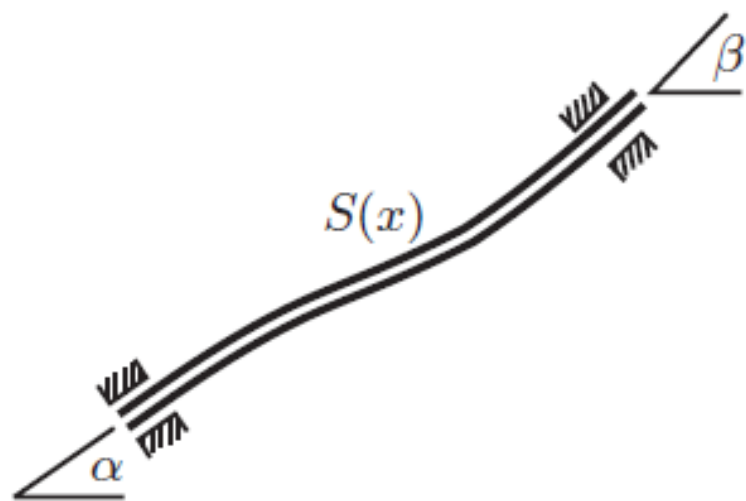


Рис. 2.8. Механический сплайн

Пусть форма этого стержня определяется функцией $y = S(x)$. Из курса сопротивления материалов известно, что уравнение свободного равновесия имеет вид $S^{IV}(x) = 0$. Отсюда следует, что между каждой парой соседних узлов интерполяции функция $S(x)$ является многочленом степени не выше третьей. Запишем ее в виде

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (2.43)$$

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i на всех n элементарных отрезках необходимо получить $4n$ уравнений. Часть из них вытекает из условий прохождения графика функции $S(x)$ через заданные точки, т. е. $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, S_i(x_i) = y_i$. Эти условия можно записать в виде

$$S_i(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}, \quad (2.44)$$

$$S_i(x_i) = a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3 = y_i, \quad (2.45)$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Эта система содержит $2n$ уравнений. Для получения недостающих уравнений зададим условия непрерывности первых и вторых производных во внутренних узлах интерполяции, т. е. условия гладкости второго порядка кривой во всех точках:

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), \quad S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (2.46)$$

Вычислим производные многочлена (2.43):

$$\begin{aligned} S'_i(x) &= b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \\ S''_i(x) &= 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Подставляя эти выражения в (2.46), получаем $2n - 2$ уравнений

$$b_{i+1} = b_i + 2h_i c_i + 3h_i^2 d_i, \quad (2.48)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3h_i d_i, \quad (2.49)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Из условий непрерывности производных в точке x_n следует, что

$$b_{n+1} = b_n + 2h_n c_n + 3h_n^2 d_n, \quad c_{n+1} = c_n + 3h_n d_n.$$

Таким образом, соотношения (2.48), (2.49) можно рассматривать для диапазона индексов

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.50)$$

Система (2.44), (2.45), (2.48), (2.49) с учетом (2.50) содержит $4n+2$ неизвестных и $4n$ уравнений и может быть дополнена, например, следующими условиями закрепления концов сплайна:

$$S'(x_0) = b_1 = k_1, \quad S'(x_n) = b_{n+1} = k_2 \quad (2.51)$$

или

$$S''(x_0) = 2c_1 = m_1, \quad S''(x_n) = 2c_{n+1} = m_2, \quad (2.52)$$

где k_1, k_2, m_1, m_2 — заданные числа.

В частности, при заданных углах наклона α и β (см. рис. 2.8)

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha, \quad k_2 = \operatorname{tg} \beta.$$

При свободном закреплении концов можно приравнять нулю кривизну линии в точках закрепления. Получаемая таким образом функция называется *свободным кубическим сплайном*. Из условия нулевой кривизны на концах следуют равенства нулю вторых производных в этих точках. Отсюда

$$m_1 = m_2 = 0.$$

Однако с целью экономии памяти компьютера и машинного времени эту систему можно привести к более удобному виду. Из условия (2.44) сразу можно найти все коэффициенты a_i . Далее, из (2.49) получим

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.53)$$

Подставим эти соотношения, а также значения $a_i = y_{i-1}$ в (2.45) и найдем отсюда коэффициенты

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3} (c_{i+1} + 2c_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.54)$$

Учитывая выражения (2.53) и (2.54), исключаем из уравнения (2.48) коэффициенты d_i и b_i . Окончательно получим следующую систему уравнений только для коэффициентов c_i :

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3 \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \right), \quad (2.55)$$

$$i = 2, 3, \dots, n;$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{3} (c_2 + 2c_1) = k_1, \quad \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \frac{h_n}{3} (2c_{n+1} + c_n) = k_2 \quad (2.56)$$

Матрица системы (2.55) трехдиагональная, т. е. ненулевые элементы находятся лишь на главной и двух соседних с ней диагоналях, расположенных сверху и снизу. Для ее решения целесообразно использовать метод прогонки (см. гл. 4). По найденным из системы (2.55), (2.56) или (2.57) коэффициентам c_i легко вычислить коэффициенты d_i , b_i .

Заметим, что кубическая сплайн-функция, удовлетворяющая условиям (2.51) или (2.52), обладает наименьшей (в некотором смысле) кривизной среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[x_0, x_n]$ с заданными значениями в узлах интерполяции, удовлетворяющих условиям (2.51) или (2.52). А именно,

$$\int_{x_0}^{x_n} [S''(x)]^2 dx \leq \int_{x_0}^{x_n} [f''(x)]^2 dx$$

для всех $f(x)$ из указанного класса функций.

7. Функции двух переменных. До сих пор мы рассматривали интерполирование функций одной независимой переменной $y = f(x)$. На практике возникает также необходимость построения интерполяционных формул для функций нескольких переменных. Для простоты ограничимся функцией двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть ее значения заданы на множестве равноотстоящих узлов (x_i, y_j) ($i, j = 0, 1, 2$). Введем обозначения $z_{ij} = f(x_i, y_j)$, $h_1 = x_{i+1} - x_i$, $h_2 = y_{j+1} - y_j$.

Построим многочлен, аналогичный многочлену Ньютона для случая одной переменной. Здесь нужно вычислять разности двух видов — по направлениям x и y . Эти частные разности первого порядка определяются формулами

$$\Delta_x z_{ij} = z_{i+1,j} - z_{ij}, \quad \Delta_y z_{ij} = z_{i,j+1} - z_{ij}.$$

Запишем также выражения для частных разностей второго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta_{xx}^2 z_{ij} &= z_{i+2,j} - 2z_{i+1,j} + z_{ij}, \\ \Delta_{yy}^2 z_{ij} &= z_{i,j+2} - 2z_{i,j+1} + z_{ij}, \\ \Delta_{xy}^2 z_{ij} &= (z_{i+1,j+1} - z_{i,j+1}) - (z_{i+1,j} - z_{ij}). \end{aligned}$$

Интерполяционный многочлен второй степени можно записать в виде

$$F(x, y) = z_{00} + \frac{x - x_0}{h_1} \Delta_x z_{00} + \frac{y - y_0}{h_2} \Delta_y z_{00} + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h_1^2} \Delta_{xx}^2 z_{00} + \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{h_1 h_2} \Delta_{xy}^2 z_{00} + \\ + \frac{(y - y_0)(y - y_1)}{2h_2^2} \Delta_{yy}^2 z_{00}.$$

Можно также построить *линейную интерполяционную формулу*. Геометрически это означает, что нужно найти уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки (x_i, y_i, z_i) , $(i = 1, 2, 3)$, где $z_i = f(x_i, y_i)$. Из курса аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости, проходящей через три точки, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вопрос 3

**Методы решения задач
аппроксимации путем подбора
эмпирических формул**

Подбор эмпирических формул.

Характер опытных данных.

В случае обработки опытных данных, полученных в результате наблюдений или измерений, нужно иметь в виду *ошибки* этих данных. Они могут быть вызваны несовершенством измерительного прибора, субъективными причинами, различными случайными факторами и т. д. Ошибки экспериментальных данных можно условно разбить на три категории по их происхождению и величине: систематические, случайные и грубые.

Систематические ошибки обычно дают отклонение в одну сторону от истинного значения измеряемой величины. Они могут быть постоянными или закономерно изменяться при повторении опыта, и их причина и характер известны. Систематические ошибки могут быть вызваны условиями эксперимента (влажностью, температурой среды и др.), дефектом измерительного прибора, его плохой регулировкой (например, смещением указательной стрелки от нулевого положения) и т. д. Эти ошибки можно устранить наладкой аппаратуры или введением соответствующих поправок.

Случайные ошибки определяются большим числом факторов, которые не могут быть устранены либо достаточно точно учтены при измерениях или при обработке результатов. Они имеют случайный (несистематический) характер, дают отклонения от средней величины в ту и другую стороны при повторении измерений и не могут быть устранены в эксперименте, как бы тщательно он ни проводился. С вероятностной точки зрения математическое ожидание случайной ошибки равно нулю. Статистическая обработка экспериментальных данных позволяет определить величину случайной ошибки и довести ее до некоторого приемлемого значения повторением измерений достаточное число раз.

Грубые ошибки явно искажают результат измерения; они чрезмерно большие и обычно пропадают при повторении опыта. Грубые ошибки существенно выходят за пределы случайной ошибки, полученные при статистической обработке. Измерения с такими ошибками отбрасываются и в расчет при окончательной обработке результатов измерений не принимаются.

2. Эмпирические формулы. Пусть, изучая неизвестную функциональную зависимость между y и x , мы в результате серии экспериментов произвели ряд измерений этих величин и получили таблицу значений

x_0	x_1	\dots	x_n
y_0	y_1	\dots	y_n

Задача состоит в том, чтобы найти приближенную зависимость

$$y = f(x), \quad (2.59)$$

значения которой при $x = x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) мало отличаются от опытных данных y_i . Приближенная функциональная зависимость (2.59), полученная на основании экспериментальных данных, называется *эмпирической формулой*.

Построение эмпирической формулы состоит из двух этапов: подбора общего вида этой формулы и определения наилучших значений содержащихся в ней параметров. Общий вид формулы иногда известен из физических соображений. Например, для упругой среды связь между напряжением σ и относительной деформацией ε определяется законом Гука: $\sigma = E\varepsilon$, где E — модуль упругости; задача сводится к определению одного неизвестного параметра E .

3. Определение параметров эмпирической зависимости. Будем считать, что тип эмпирической формулы выбран, и ее можно представить в виде

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m), \quad (2.63)$$

где φ — известная функция, a_0, a_1, \dots, a_m — неизвестные постоянные параметры. Задача состоит в том, чтобы определить такие значения этих параметров, при которых эмпирическая формула дает хорошее приближение данной функции, значения которой в точках x_i равны y_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Как уже отмечалось выше, здесь не ставится условие (как в случае интерполяции) совпадения опытных данных y_i со значениями эмпирической функции (2.63) в точках x_i . Разность между этими значениями (отклонения) обозначим через ε_i . Тогда

$$\varepsilon_i = \varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.64)$$

Задача нахождения наилучших значений параметров a_0, a_1, \dots, a_m сводится к некоторой минимизации отклонений ε_i . Существует несколько способов решения этой задачи.

Простейшим из них является *метод выбранных точек*. Он состоит в следующем. По заданным экспериментальным значениям на координатной плоскости OXY наносится система точек. Затем проводится простейшая плавная линия (например, прямая), которая наиболее близко примыкает к данным точкам. На этой линии выбираются точки, которые, вообще говоря, не принадлежат исходной системе точек. Число выбранных точек должно быть равным количеству искомых параметров эмпирической зависимости. Координаты этих точек (x_j^0, y_j^0) тщательно измеряются и используются для записи условия прохождения графика эмпирической функции (2.63) через выбранные точки:

$$\varphi(x_j^0, a_0, a_1, \dots, a_m) = y_j^0, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (2.65)$$

Из этой системы уравнений находятся значения параметров $a_0, a_1, \dots, \dots, a_m$.

Рассмотрим еще один способ определения параметров эмпирической формулы — *метод средних*. Он состоит в том, что параметры a_0, a_1, \dots, a_m зависимости (2.63) определяются с использованием условия равенства нулю суммы отклонений (2.64) во всех точках x_i :

$$\sum_{i=0}^n \varepsilon_i = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i] = 0. \quad (2.67)$$

Полученное уравнение служит для определения параметров $a_0, a_1, \dots, \dots, a_m$. Ясно, что из одного уравнения нельзя однозначно определить все $m + 1$ параметров. Однако, поскольку других условий нет, равенство (2.67) путем группировки отклонений ε_i , разбивается на систему, состоящую из $m + 1$ уравнений. Например,

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= 0, \\ \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, можно найти неизвестные параметры.

4. Метод наименьших квадратов. Запишем сумму квадратов отклонений (2.64) для всех точек x_0, x_1, \dots, x_n :

$$S = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i]^2. \quad (2.69)$$

Параметры a_0, a_1, \dots, a_m эмпирической формулы (2.63) будем находить из условия минимума функции $S = S(a_0, a_1, \dots, a_m)$. В этом состоит *метод наименьших квадратов*.

В теории вероятностей доказывается, что полученные таким методом значения параметров наиболее вероятны, если отклонения ε_i подчиняются нормальному закону распределения.

Поскольку здесь параметры a_0, a_1, \dots, a_m выступают в роли независимых переменных функции S , то ее минимум найдем, приравняв нулю частные производные по этим переменным:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \quad (2.70)$$

Полученные соотношения — система уравнений для определения a_0, a_1, \dots, a_m .

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для широко используемого на практике частного случая, когда функция φ является линейной по неизвестным параметрам a_0, a_1, \dots, a_m :

$$\varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x),$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ — известные функции x . Формула (2.69) для определения суммы квадратов отклонений S примет вид

$$S = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right]^2.$$

Для составления системы (2.70) продифференцируем S по переменным a_k ($k = 0, 1, \dots, m$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a_k} &= \frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right]^2 = \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial a_k} \left[\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right]^2 = \\ &= \sum_{i=0}^n 2 \left[\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right] \varphi_k(x_i) = 2 \sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) \left[\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right].\end{aligned}$$

Приравнявая найденные производные нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) \left[\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.71)$$

Система (2.71) является системой линейных алгебраических уравнений, ее можно записать в наглядном векторно-матричном виде (см. гл. 4). Для этого введем векторы опытных данных \mathbf{y} и неизвестных параметров \mathbf{a} , а также матрицу Φ следующим образом

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь векторы \mathbf{y} и \mathbf{a} имеют размерности $n+1$ и $m+1$ соответственно, а матрица Φ имеет размерность $(n+1) \times (m+1)$. Для ее элементов справедливо выражение

$$\Phi_{ij} = \varphi_j(x_i).$$

Нетрудно убедиться, что выражение, стоящее в квадратных скобках в (2.71), является i -й компонентой вектора $\Phi\mathbf{a} - \mathbf{y}$, а каждое уравнение (2.71) представляет собой равенство нулю k -й компоненты вектора $\Phi^T(\Phi\mathbf{a} - \mathbf{y})$, где Φ^T — транспонированная матрица. Таким образом, систему (2.71) можно записать в виде

$$\Phi^T(\Phi\mathbf{a} - \mathbf{y}) = 0$$

или

$$(\Phi^T\Phi)\mathbf{a} = \Phi^T\mathbf{y}. \tag{2.72}$$

Матрица этой системы $\Phi^T\Phi$ имеет размерность $(m+1) \times (m+1)$, вектор \mathbf{a} является искомым.

5. Локальное сглаживание данных. Как отмечалось в п. 1, опытные данные содержат случайные ошибки, что является причиной разброса этих данных. Во многих случаях бывает целесообразно провести их *сглаживание* для получения более плавного характера исследуемой зависимости. Существуют различные способы сглаживания. Рассмотрим один из них, основанный на методе наименьших квадратов.

Пусть в результате экспериментального исследования зависимости $y = f(x)$ получена таблица значений искомой функции $y_0, y_1, \dots, \dots, y_n$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n . Значения аргумента x_i предполагаются равноотстоящими, а опытные данные y_i — имеющими одинаковую точность. Предполагается также, что функция $y = f(x)$ на произвольной части отрезка $[x_0, x_n]$ может быть достаточно хорошо аппроксимирована многочленом некоторой степени m .

Рассматриваемый способ сглаживания состоит в следующем. Для нахождения сглаженного значения \bar{y}_i в точке x_i выбираем по обе стороны от нее $k + 1$ значение аргумента из имеющихся в таблице (k четное):

$x_{i-k/2}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k/2}$. По опытным значениям рассматриваемой функции в этих точках $y_{i-k/2}, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+k/2}$ строим многочлен степени m с помощью метода наименьших квадратов (при этом $m \leq k$). Значение полученного многочлена \bar{y}_i в точке x_i и будет искомым (сглаженным) значением. Процесс повторяется для всех внутренних точек. Сглаживание значений, расположенных вблизи концов отрезка $[x_0, x_n]$, производится с помощью крайних точек.

Опыт показывает, что сглаженные значения \bar{y}_i , как правило, с достаточной степенью точности близки к истинным значениям. Иногда сглаживание повторяют. Однако это может привести к существенному искажению истинного характера рассматриваемой функциональной зависимости.

Приведем в заключение несколько формул для вычисления сглаженных значений опытных данных при различных m , k :

$$m = 1:$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{3}(y_{i-1} + y_i + y_{i+1}), \quad k = 2,$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{5}(y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}), \quad k = 4,$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{7}(y_{i-3} + y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2} + y_{i+3}), \quad k = 6;$$

$$m = 3:$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{35}(-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2}), \quad k = 4,$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{21}(-2y_{i-3} + 3y_{i-2} + 6y_{i-1} + 7y_i + 6y_{i+1} + 3y_{i+2} - 2y_{i+3}), \quad k = 6,$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{231}(-21y_{i-4} + 14y_{i-3} + 39y_{i-2} + 54y_{i-1} + 59y_i + 54y_{i+1} + \\ + 39y_{i+2} + 14y_{i+3} - 21y_{i+4}), \quad k = 8;$$

$$m = 5:$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{231}(5y_{i-3} - 30y_{i-2} + 75y_{i-1} + 131y_i + 75y_{i+1} - 30y_{i+2} + 5y_{i+3}), \\ k = 6,$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{429}(15y_{i-4} - 55y_{i-3} + 30y_{i-2} + 135y_{i-1} + 179y_i + 135y_{i+1} + \\ + 30y_{i+2} - 55y_{i+3} + 15y_{i+4}), \quad k = 8.$$

Конец лекции